О СИЛОВСКИХ СИСТЕМАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Э.М. Пальчик

Полоцкий государственный университет
Блохина 29, 211440 Новополоцк, Витебская обл., Беларусь bashunsviat@mail.ru

Обозначения и терминология стандартные [1 – 3].

Ф.Холл ввел понятие силовской системы для конечной разрешимой группы G [1, определение VI.2.1 b)]. Это набор силовских подгрупп группы G, взятых по одной для каждого $p \in \pi(G)$, которые попарно перестановочны.

В связи с прогрессом теории конечных групп были получены фундаментальные результаты в области теорем силовского типа для холловых подгрупп конечных групп, полученные в основном трудами Ф.Гросса, Е.Р.Вдовина и Д.О.Ревина [3].

С использованием этих результатов появилась возможность обобщить понятие силовской системы для разрешимых групп.

Определение 1. Множество $\mathfrak{S} = \{G_s, ..., G_t\}$, где $\{s, ..., t\}$ — все различные простые делители порядка $|G|$ конечной группы G, назовем специальной силовской системой группы G, если G_s перестановочна со всеми подгруппами множества $\mathfrak{S}$ (кратко: CCG_s–система).

Если $s = 2$, то может быть доказан следующий результат.

Теорема 1. *Следующие свойства конечной группы эквивалентны:* (1) *G–разрешимая группа;* (2) *G имеет силовскую систему в смысле Ф.Холла;* (3) *G имеет CCG_2–систему.*

Доказательство. То, что (1) $\Leftrightarrow$ (2) доказано Ф.Холлом [1, теорема VI.2.3]. Докажем, что (3) $\Leftrightarrow$ (1). Ясно, что достаточно доказать, что (3) $\Rightarrow$ (1).

Предположим, что G — простая неабелева группа. Если $G \in \{A_n, n \geq 5\}$, то G не имеет CCG_2–системы [3, теорема 8.1, табл.2]. Если $G \in Spor$, то G не имеет CCG_2–системы [3, теорема 8.2, табл.4; 4, гл.5, раздел 5.3].

Предположим, что $\overline{G} \in Chev(q)$, $q = p^f$, $G = \overline{G}/Z(\overline{G})$, $p > 2$. По условию в G и $\overline{G}$ есть холлова $\{2, p\}$–подгруппа $\overline{T}$. По [3, теорема 8.3] $\overline{T}$ лежит в подгруппе Бореля $\overline{B}$ группы $\overline{G}$ (так как $\overline{T}$ — разрешимая группа, то она не отличная от $\overline{B}$ параболическая подгруппа [2, с.87 и следствие 2.16, с.86]). Если $p > 2$, то $\overline{G}_2$ — абелева группа [2, с.61]. По теореме Дж.Уолтера [2, теорема 4.126] $G \in \{L_2(2^f); L_2(q), q \equiv \pm 3 \pmod 8), J_1, {}^2G_2(q)\}$. Эти группы не имеют CCG_2–систем [1, теорема II.8.27; 3, табл.10; 3, табл.4; 3, табл.9]. (Например, у групп ${}^2G_2(q)$ по [3, табл.9] все простые делители $t \neq 2, 3$ лежали бы в $\pi(q-1)$, или в $\pi(q+1)$, или в $\{7\}$, что невозможно). Если же $p = 2$, то по [3, теорема 8.3] все силовские подгруппы нечетного порядка должны лежать в подгруппе Бореля $\overline{B}$. Но тогда $\overline{G}_2 \lhd \overline{G}$ и $G' \neq G$. Итак, G — не простая группа. Пусть $1 \neq M \lhd G$, $M \subset G$. Тогда $G_2G_t \cap M = M_2M_t$ для всех $t \in \pi(G) \cap \pi(M)$. По заключению индукции (3) $\Leftrightarrow$ (1) в M. Точно так, ввиду [1, лемма I.7.7], $G/M = G^*$ имеет CCG_2^*–систему и (3) $\Leftrightarrow$ (1). Но тогда и группа G разрешима. Теорема доказана.

Группа G с CCG_3–системой может быть и простой. Например, $G \cong L_3(q)$, $12|(q+1)$, $9 \nmid (q+1)$.

Теорема 2. *Пусть s — наибольший простой делитель порядка конечной группы G. Если G имеет CCG_s–систему, то она является s–разрешимой группой.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, сразу считаем, что $\overline{G} \in Chev(q)$, $q = p^f$, $G = \overline{G}/Z(\overline{G})$.

По условию в G и $\overline{G}$ есть холловы $\{t, s\}$–подгруппы T и $\overline{T}$ для всех $t \notin \{2, p\}$, $t \in \pi(G)$. Пусть $s \neq p$. Так как $t < s$, то по [5, теорема 1] $\overline{T}_s \lhd \overline{T}$. Поэтому $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{T}_s)$ имеет в $\overline{G}$ примарный или бипримарный индекс i (ввиду $\overline{T}_s \ntriangleleft \overline{G}$) и $\pi(i) \subset \{2, p\}$. Если индекс примарный, то по [6, теорема 5.8] G такая группа, что не имеет CCG_s–систем. Если N имеет в G бипримарный индекс, то по [7] N есть разрешимая подгруппа в $G \in \{L_2(q)$, $L_3(3)$, $L_3(5)$,

$PSp_4(3), U_3(3), U_3(4), U_3(7), U_5(2), M_{11}, M_{12}\}$. По [3, табл.3, 4, 7] эти группы не имеют CCG_s–систем. Если $s = p$, то, как и в доказательстве теоремы 1, $G_s \lhd G$. Поэтому G — не простая группа и утверждение доказывается как и в теореме 1. Теорема доказана.

С использованием теорем 1, 4, леммы 14 в [5], теорем 8.3, 8.8, 8.9 в [3] и теоремы Жигмонди (частный случай теоремы Фейта [7, лемма 2.1]) доказывается следующий общий факт.

Теорема 3. *Пусть s — простой делитель порядка конечной группы G, $s > 3$. Если G имеет CCG_s–систему, то она является s–разрешимой группой.*

Из теорем 1 и 3 не сложно получить

Следствие. *Пусть G — конечная группа с CCG_s–системой, $s \neq 3$. Пусть $\pi \subset \pi(G)$ и $s \notin \pi$. Если индексы нормализаторов силовских подгрупп G_t, $t \in \pi$, взаимно просты с s, то в G есть G_s–инвариантная s'–подгруппа $K = \langle G_t / t \in \pi \rangle$.*

Литература

1. Huppert B. *Endliche Gruppen*, I. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

2. Горенстейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* М.: Мир, 1985.

3. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. *Теоремы силовского типа* // Успехи мат.н. 2011. Т. 66. № 5(401). С. 3–46.

4. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups* // Math. Surveys and Monogr. 1998. Vol. 40. No 3. P. 1–419.

5. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. *Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах* // Алгебра и логика. 2002. Т. 41. № 1. С. 15–56.

6. Arad Z., Fisman E. *On finite factorizable group* // J. Algebra. 1984. Vol. 86. No 2. P. 522–548.

7. Li C. H., Li X. *On permutation groups of degree a product of two prime-powers* // Commun. Algebra. 2014. Vol. 42. P. 4722–4743.